Chapitre 2

Analyse fonctionnelle

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre seront sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et toutes les applications linéaires sont linéaires sur $\mathbb{K}$.

2.1 Espaces de Banach

Commençons ce paragraphe par un résumé des propriétés des espaces de Banach et des exemples.

2.1.1 DÉFINITION
Un espace de Banach est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ complet pour la distance induite par la norme.

2.1.1 Exemples

1) L'espace $\mathbb{K}^n$ est un espace de Banach pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach, pour n'importe quelle norme.
   En effet, soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un isomorphisme isométrique de $\mathbb{K}^n$ sur E. Plus précisement, soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E fixée. On définit sur E une norme en posant, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. On définit alors un isomorphisme (linéaire) et isométrique $\Phi : \mathbb{K}^n \to E$, par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On peut ainsi identifier tout espace vectoriel normé de dimension n à $\mathbb{K}^n$ via cet isomorphisme.
3) Les espaces $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $p \in [0, +\infty]$ sont des espaces de Banach de dimension infinie.

4) Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est complet, c'est donc un espace de Banach (pour la norme induite). En particulier, tout sous-espace de dimension finie.

5) Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.
Soit $(E_i, \|.\|_{E_i})$, $1 \leq i \leq n$, des espaces de Banach. Alors l'espace produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est un espace de Banach, pour l'une des normes équivalentes suivantes :
$||(x_1, \ldots, x_n)||_p = (||x_1||_{E_1}^p + \cdots + ||x_n||_{E_n}^p)^{1/p}$, $p \in [1, +\infty[$ et
$||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = \max\{||x_1||_{E_1}, \ldots, ||x_n||_{E_n}\}$.

Elles sont en effet équivalentes puisque $\|.\|_\infty \leq \|.\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|.\|_\infty$.
Dans la suite, un produit fini d'espaces vectoriels normés sera considéré muni de l'une des ces normes.

Espace d'applications linéaires continues

Soient E et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
Une application linéaire u de E dans F est continue si et seulement si $||u|| = \sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F$ est finie.
L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F, est muni de *la norme d'opérateur* $||u|| = \sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F$.
Si $E = F$, on note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E, E)$.

2.1.2 REMARQUE

1) Il est facile de voir que $||u|| = \sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F = \sup\limits_{||x||_E = 1} ||u(x)||_F = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{||u(x)||_F}{||x||_E}$.

2) Soient E, F et G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Pour tous $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, nous avons $||v \circ u|| \leq ||v|| ||u||$. Par conséquent, les applications linéaires de composition à droite $u \mapsto u \circ v$ et de composition à gauche $v \mapsto u \circ v$ et l'application bilinéaire de composition $(u, v) \mapsto u \circ v$ sont continues.

2.1.3 PROPOSITION

Si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration: Soit B la boule unité fermée de E. Il résulte de la définition de la norme d'une application linéaire continue de E dans F que l'application Φ de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{BC}(B, F)$ définie par $\Phi(f) = f_{|_B}$ est une isométrie. De plus son image $\mathscr{F}$ est fermée, car si $g \in \mathscr{BC}(B, F)$ est dans l'adhérence de $\mathscr{F}$ alors, la fonction f, définie par $f(x) = g(x)$ si $x \in B$ et $f(x) = \|x\| g(\frac{x}{\|x\|})$ si $x \notin B$ est bien définie sur E, linéaire et prolonge g. D'après le théorème 1.4.4, $\mathscr{F}$ est complet, et par isométrie $\mathscr{L}(E, F)$ est complet. ■

2.1.5 COROLLAIRE

Le dual topologique $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ de E, qui est aussi parfois noté E^*, est un espace de Banach pour la *norme duale* $||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$.

De même $E'' = \mathscr{L}(E', \mathbb{K})$, Le bidual (topologique) de E, est un espace de Banach.

Une caractérisation des espaces de Banach

2.1.6 DÉFINITION

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans un evn E.

1) On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ *converge* si la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge, lorsque $n \to +\infty$, vers un vecteur $x \in E$.

2) On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est *normalement (ou absolument) convergente* si la série de nombres réels positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}} ||x_n||$ converge.

Rappelons que dans le cas scalaire, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la convergence normale d'une série entraîne sa convergence (la réciproque est en général fausse). Le théorème suivant montre, que cela arrive justement grâce à la complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2.1.7 PROPOSITION

Un espace vectoriel normé E. Les condition suivantes sont équivalentes

i) E est un espace de Banach

ii) toute série normalement convergente est convergente dans E.

Démonstration: 1) $i) \implies ii)$ Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ une série normalement convergente i.e. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Alors, par l'inégalité triangulaire, on a $\lim_{n \to +\infty} \| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \| \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| = 0$, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est alors de Cauchy, et donc converge par complétude de E.

2) $ii) \implies i)$ Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E, nous allons construire une sous-suite convergente, ce qui entrainera la convergence de la suite (x_n).

Comme (x_n) une suite de Cauchy, Il existe N_0 tel que pour $n, m \geq N_0$ on ait $\|x_n - x_m\| \leq 1$. Puis, il existe $N_1 > N_0$ tel que pour $n, m \geq N_1$, on ait

$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, par récurrence, on construit une suite strictement croissante $N_0 < N_1 < \ldots < N_k < \ldots$ telle que pour $n, m \geq N_k$, on ait $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2^k}$.
En posant $\phi(n) = N_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; la sous-suite $(x_{\phi(n)})$ vérifie en particulier : $\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\| \leq \dfrac{1}{2^n}$. La $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}$ est alors normalement convergente, puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$, elle converge dans E.
Comme la série est télésopique, la suite des sommes partielles vérifie $S_{n-1} = x_{\phi(n)} - x_{\phi(0)}$ ce qui entraîne la convergence de $x_{\phi(n)} = S_{n-1} + x_{\phi(0)}$. ■

2.1.9 Définition

Soient E et F deux evn. Une application de E dans F est un isomophisme linéaire si elle est linéaire, bijective, continue et d'inverse continue (qui est alors linéaire). On note par $Isom(E,\ F)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de E dans F.

Si $E = F$, on note $Isom(E)$ au lieu de $Isom(E,\ E)$.

2.1.10 Théorème

Soient E et F deux espaces de Banach. Alors $Isom(E,\ F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,\ F)$, et l'application $u \mapsto u^{-1}$ de $Isom(E,\ F)$ dans $Isom(F,\ E)$ est continue.

Plus précisemment, si $u_0 \in Isom(E,\ F)$ et $u \in B(u_0, \frac{1}{||u_0^{-1}||})$ alors $u \in Isom(E,\ F)$ et

$$u^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{id}_E - u_0^{-1}u)^n \circ u_0^{-1}$$

2.1.11 Lemme (de von Neumann)

Soient E un espace de Banach et $u \in \mathscr{L}(E,\ E)$. Si $||u|| < 1$, alors $\mathrm{id}_E - u \in Isom(E)$ et d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$.

Démonstration: La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^k$ dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E,\ E)$ est normalement convergente, car $||u^k|| \leq ||u||^k$, donc converge vers $v \in \mathscr{L}(E,\ E)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{id}_E - u) \circ (\sum_{k=0}^{n} u^k) = (\sum_{k=0}^{n} u^k) \circ (\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{id}_E - u^{n+1}$, par passage à la limite, on obtient que que l'élément $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$ est l'inverse de $\mathrm{id}_E - u$. ■

Démonstration: Soient $u_0 \in Isom(E,\, F)$ et $u \in \mathscr{L}(E,\, F)$ tels que $||u - u_0|| < \dfrac{1}{||u_0^{-1}||}$. Posons $v = \mathrm{id}_E - u_0^{-1}u$. Alors

$$||v|| = ||u_0^{-1}(u - u_0)|| \leq ||u_0^{-1}||\,||u - u_0|| < 1,\ (*)$$

donc $\mathrm{id}_E - v = u_0^{-1}u$ est inversible, d'inverse continu $\sum_{n\in\mathbb{N}} v^n$, par le lemme précédent. Donc u est inversible et $u^{-1} = (\mathrm{id}_E - v)^{-1} \circ u_0^{-1}$ est continu, ce qui montre que la boule ouverte de centre u_0 et de rayon $\frac{1}{||u_0^{-1}||}$ est contenue dans $Isom(E,\, F)$, il s'en suit qu'il est ouvert dans $\mathscr{L}(E,\, F)$.

L'expression ci-dessus de u^{-1} montre aussi que

$$||u^{-1} - u_0^{-1}|| = ||\left((\mathrm{id}_E - v)^{-1} - \mathrm{id}_E\right)u_0^{-1}|| \leq ||(\mathrm{id}_E - v)^{-1} - \mathrm{id}_E||\,||u_0^{-1}||$$

$$= \|\sum_{n=1}^{+\infty} v^n\|\,||u_0^{-1}|| \leq ||v||\frac{||u_0^{-1}||}{1 - ||v||},$$

qui tend vers 0 quand u tend vers u_0, car alors $||v||$ tend vers 0 par $(*)$. La continuité en tout point de $Isom(E,\, F)$ de $u \mapsto u^{-1}$ en découle. ∎

2.1.2 Construction d'espaces de Banach

1) Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. En effet, soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors il existe un isomorphisme isométrique de $\mathbb{R}^n$ sur E. Plus précisement, soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E fixée. On définit sur E une norme en posant, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. On définit alors un isomorphisme (linéaire) et isométrique Φ par : $\Phi : \mathbb{R}^n \to E$, par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On peut ainsi identifier tout espace vectoriel normé de dimension n à $\mathbb{R}^n$ via cet isomorphisme.

2) Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est complet, c'est donc un espace de Banach (pour la norme induite). En particulier, tout sous-espace de dimension finie.

3) Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.

Soit $(E_i, \|.\|_i)$, $1 \leq i \leq n$, des espaces de Banach. Alors l'espace produit $E = \prod_{i=1}^n E_i$ est un espace de Banach, pour l'une des normes équivalentes suivantes :

$||(x_1,\, \ldots,\, x_n)||_p = (||x_1||_1^p + \cdots + ||x_n||_n^p)^{1/p}$ si $p \in [1, +\infty[$ et

$||(x_1,\, \ldots,\, x_n)||_\infty = \max\{||x_1||_1,\, \ldots,\, ||x_n||_n\}$.

Dans la suite, un produit fini d'espaces vectoriels normés sera considéré muni de l'une des ces normes.

2.1.14 Proposition

Soit E un espace de Banach, E' un evn et $p : E \to E'$ une application linéaire continue et surjective tels que :
il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $y \in E'$ il existe $x \in E$, vérifiant $y = p(x)$ et $\|x\| \leq C\|y\|$.

Alors E' est un espace de Banach.

Démonstration: Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E' telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$. On doit montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ converge dans E'.
Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $y_n = p(x_n)$ et $\|x_n\| \leq C\|y_n\|$. Alors, $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ et par complétude de E, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge vers x, élément de E. Ainsi, par continuité, $\sum_{k=0}^{n} y_k = p(S_n)$ converge vers $p(x)$. ∎

2.1.16 Théorème (Espace quotient d'un banach)

Si E est un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E, alors E/F est un espace de Banach.

Démonstration: On applique la proposition 2.1.14 à $p : E \to E/F$ la projection canonique et N la norme quotient ; on va montrer que dans ce cas $C = 2$ convient.
On peut supposer que $F \neq \{0\}$ (sinon $E/F = E$). Soit $\xi \in E/F$.
Si $\xi = 0$, alors $\xi = p(0)$ et $N(\xi) = 0 \leq 2\|0\|$.
Si $\xi \neq 0$, soit x_0 un représentant de ξ, alors $N(\xi) = \inf\{\|x\| \mid x \in \xi\} = d(x_0, F) > 0$, puisque F est fermé. Maintenant, par la définition de la borne inférieure, il existe $a \in \xi$ tel que $\|a\| \leq 2N(\xi)$, ceci termine la preuve puisque $p(a) = \xi$.

Complexification

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ on peut lui associer un espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ d'une manière naturelle, qui rappelle le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, l'espace $E_{\mathbb{C}}$ sera l'espace des vecteurs de la forme $z = x + iy$, où x et y sont des éléments de E. On définira pour tous $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans $E_{\mathbb{C}}$ et $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \\ \lambda z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay). \end{cases}$$

2.1.18 DÉFINITION

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *complexifié* de E l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ obtenu en munissant l'espace vectoriel $E \times E$ de la structure d'espace vectoriel complexe donnée par $(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$). On plonge E dans $E_{\mathbb{C}}$ par l'application $j : x \mapsto (x, 0)$.

Supposons maintenant $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel normé. On définit une application

$$\|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}} \,:\, E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R} :\, z \mapsto \max\{\|\mathrm{Re}(\mu z)\|_E \,:\, \mu \in \mathbb{C},\ |\mu| = 1\}.$$

2.1.19 REMARQUE

1) A noter qu'on peut aussi l'écrire

$$\|x + iy\|_{E_{\mathbb{C}}} = \max_{\theta \in [0,2\pi[} \|\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\|_E.$$

2) On a $\|x + iy\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ pour tout $x + iy \in E_{\mathbb{C}}$. En effet $\|x + iy\|_{E_{\mathbb{C}}} = \max_{\theta \in [0,2\pi[} \|\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\|_E \leq \max_{\theta \in [0,2\pi[} \|\cos(\theta)x\|_E + \|\sin(\theta)y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

3) On a aussi $\|j(x)\|_{E_{\mathbb{C}}} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

2.1.20 THÉORÈME

L'application $\|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}}$ est une norme sur l'espace vectoriel $E_{\mathbb{C}}$.

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, il en est de même pour son complexifié $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}})$.

Démonstration: Par exemple, soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in E_{\mathbb{C}}$.
Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ alors
$\||\lambda| e^{i\theta} z\|_{E_{\mathbb{C}}} = \max\{\|\mathrm{Re}(\mu|\lambda| e^{i\theta})\|_E \,:\, \mu \in \mathbb{C},\ |\mu| = 1\} = |\lambda| \max\{\|\mathrm{Re}(\mu e^{i\theta} z)\|_E \,:\, \mu \in \mathbb{C},\ |\mu| = 1\} = |\lambda| \|z\|_{E_{\mathbb{C}}}$.
Les autres axiomes de la norme se vérifient de la même façon.

Passons à la seconde assertion, soit $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x + iy\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E_{\mathbb{C}}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe N_ε tel que $\|z_n - z_m\|_{E_{\mathbb{C}}} < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$. Il s'en suit que $\|x_n - x_m\|_E,\ \|y_n - y_m\|_E \leq \|(x_n - x_m) - i(y_n - y_m)\|_{E_{\mathbb{C}}} = \|z_n - z_m\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$. Ainsi $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont de Cauchy dans E. Par la complétude de E, il existe $x, y \in E,\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$ et $\|y_n - y\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$. Posons $u = x - iy$ et $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors pour tout $n \geq N$, $\|z_n - z\|_{E_{\mathbb{C}}} = \|(x_n - x) + i(y_n - y)\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \|x_n - x\|_E + \|y_n - y\|_E < \varepsilon$. Donc z_n converge vers z dans $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}})$. ∎

Soient E et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $T : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.

On définit $\tilde{T} : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ par $\tilde{T}(x+iy) = T(x) + iT(y)$ pour tout $x + iy \in E_{\mathbb{C}}$. $\tilde{T}$ ainsi définie est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

2.1.22 PROPOSITION

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $\tilde{T}$ l'application linéaire sur de $E_{\mathbb{C}}$ dans $F_{\mathbb{C}}$ associé a T. Alors $\tilde{T} \in \mathscr{L}(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$

$$\|T\| = \|\tilde{T}\|$$

Démonstration: Comme $\tilde{T}$ est une extension de T, on a $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$.
D'autre part, si $u = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$, on a
$\|\tilde{T}(u)\|_{F_{\mathbb{C}}} = \|\tilde{T}(x+iy)\|_{F_{\mathbb{C}}} = \|T(x)+iT(y)\|_{F_{\mathbb{C}}} = \max\limits_{\theta \in [0,2\pi[} \|T(x)\cos\theta - T(y)\sin\theta\|_F$
$= \max\limits_{\theta \in [0,2\pi[} \|T(x\cos\theta - y\sin\theta)\|_F \leq \|T\| \max\limits_{\theta \in [0,2\pi[} \|x\cos\theta - y\sin\theta\|_E = \|T\|\|u\|_{E_{\mathbb{C}}}$.
D'où $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. ∎